第八章　向量的数量积与三角恒等变换

8.1　向量的数量积

8.1.1　向量数量积的概念+
8.1.2　向量数量积的运算律

易错记

1-1. 4　8　【解析】如图,取 BC 的中点 E,连接 AE.

因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形,点 D 在 BC 的延长线上,且 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CD}$,所以 $AE\perp BC$,

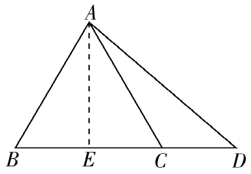
$BE=EC=CD=\dfrac{1}{2}AB$,$AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$,

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中,$AE^2+ED^2=AD^2$,即

$\dfrac{3}{4}AB^2+AB^2=28$,

解得 $AB=4$.

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=4\times4\times\cos 60°+4\times4\times\cos(180°-60°)+4\times4\times\cos 60°=8$.



2-1.【解】(1)因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 120°=1\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$,

所以 $(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=3+2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1=1$.

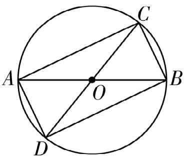
(2)因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°=1\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

因为向量 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角,所以 $(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})>0$,且不能同向共线,所以 $(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}^2-(k^2+2)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2k\boldsymbol{b}^2=3k-\dfrac{k^2+2}{2}>0$,$\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}\neq\lambda(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})(\lambda>0)$,所以 $3-\sqrt{7}<k<\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}<k<3+\sqrt{7}$,所以实数 k 的取值范围是

$(3-\sqrt{7},\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},3+\sqrt{7})$.

题型诀

1–1. 3 【解析】依题意,连接 BC,BD,如图所示.



因为 AB 是直径,所以 $AC\perp BC,AD\perp BD$,

所以 $|\overrightarrow{AB}|\cos\angle CAB=|\overrightarrow{AC}|$,

$|\overrightarrow{AB}|\cos\angle BAD=|\overrightarrow{AD}|$,

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle CAB-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cdot\cos\angle BAD=|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AD}|^2=4-1=3$.

1–2. 【解】(1)由已知及向量的数量积公式可得,若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $30°$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos 30°=\sqrt{3}$.

(2)若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则当两向量同向时,其夹角为 $0°$,此时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos 0°=2$;

当两向量反向时,其夹角为 $180°$,此时 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos 180°=-2$.

(3)若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则其夹角为 $90°$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos 90°=0$.

2–1. -4 【解析】因为在 $\triangle ABC$ 中,$AB=4,AC=5,BC=3$,所以 $AC^2=AB^2+BC^2$,即 $BC\perp AB$,所以 $\cos\angle BAC=\dfrac{4}{5}$,则 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\rangle=\cos(\pi-\angle BAC)=-\cos\angle BAC=-\dfrac{4}{5}$,所以 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 上的投影的数量为 $|\overrightarrow{AC}|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\rangle=5\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-4$.

2–2. 【解】(1)因为 $(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=19$,所以 $9\boldsymbol{a}^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=19$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$,即 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-1$,

解得 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\dfrac{1}{2}$,

又 $0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$,故向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{2\pi}{3}$.

(2) $|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=$

$\dfrac{b\cdot a-b^2}{\sqrt{(a-b)^2}}=\dfrac{-1-4}{\sqrt{a^2-2a\cdot b+b^2}}=-\dfrac{5}{\sqrt{7}}=-\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$.

3-1. B 【解析】因为$(\lambda b-a)\perp a$,所以$(\lambda b-a)\cdot a=0$,即$\lambda a\cdot b-a^2=0$,故$\lambda\times\sqrt{3}\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-3=0$,所以$\lambda=2$,故选 B.

3-2. 【解】$\because(ka-b)\perp(a+2b)$,$\therefore(ka-b)\cdot(a+2b)=0$,即$ka^2+(2k-1)a\cdot b-2b^2=0$,$\therefore k\times5^2+(2k-1)\times5\times4\times\cos60°-2\times4^2=0$. $\therefore k=\dfrac{14}{15}$. $\therefore$当$k=\dfrac{14}{15}$时,向量$ka-b$与向量$a+2b$垂直.

4-1. $\dfrac{2\pi}{3}$ 【解析】因为向量a在向量b上的投影向量为$-e$,所以$\dfrac{a\cdot b}{|b|}=\dfrac{|a|\cdot|b|\cdot\cos\langle a,b\rangle}{|b|}=-1$,即$\cos\langle a,b\rangle=-\dfrac{1}{2}$. 因为$\langle a,b\rangle\in[0,\pi]$,所以$\langle a,b\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$.

4-2. 【解】由$\begin{cases}(a+3b)\cdot(7a-5b)=0,\\(a-4b)\cdot(7a-2b)=0,\end{cases}$

可得$\begin{cases}7a^2+16a\cdot b-15b^2=0,①\\7a^2-30a\cdot b+8b^2=0,②\end{cases}$

①-②,得$2a\cdot b=b^2$,③

③代入①,得$a^2=b^2$,即$|a|=|b|$.

设θ为向量a与b的夹角,则有$\cos\theta=\dfrac{a\cdot b}{|a||b|}=\dfrac{\frac{1}{2}b^2}{|b|^2}=\dfrac{1}{2}$.

又$\because0°\leqslant\theta\leqslant180°$,$\therefore\theta=60°$.

5-1. B 【解析】因为$(a+2b)\cdot(a-3b)=|a|^2-a\cdot b-6|b|^2=|a|^2-4|a|\cos60°-6\times16=-72$,解得$|a|=-4$(舍)或$|a|=6$. 故选 B.

5-2. $\sqrt{2}$ 【解析】由$a+b+c=\mathbf{0}$可得$c=-a-b$,两边同时平方得$c^2=a^2+2a\cdot b+b^2$,又$|a|=1$,$|c|=1$,$a\cdot b=-1$,$\therefore1=1-2+|b|^2$,解得$|b|=\sqrt{2}$.

5-3. 5或1 【解析】由题意,可得任意两向量的夹角是0°或120°.

当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两夹角为 0°时,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 方向相同,则$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=5$;

当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两夹角为 120°时,由于$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1,|\boldsymbol{c}|=2$,故$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1^2+4\times1^2+2^2+4\times1\times1\times\cos 120°+2\times1\times2\times\cos 120°+4\times1\times2\times\cos 120°=1$,即$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2=1$,得$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=1$.

综上,$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=5$ 或 1.

6-1. A 【解析】$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,所以由$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$,得$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$,即$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AC}^2$,所以$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$,故$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

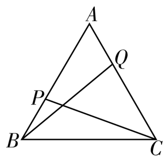
6-2. B 【解析】$\because \overrightarrow{AB}^2=|\overrightarrow{AB}|^2$,$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-|\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}>0$,而 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\pi-B)=-|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos B>0$,$\therefore \cos B<0$. $\because B\in(0,\pi)$,$\therefore B$ 为钝角,$\therefore$ 此三角形是钝角三角形. 故选 B.

6-3. D 【解析】由 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$,可得$\angle BAC$ 的平分线垂直于 BC,所以 $AB=AC$.

又因为$\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{1}{2}$,且$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle\in(0,\pi)$,

所以$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$,所以$\triangle ABC$ 为等边三角形,故选 D.

7-1. C 【解析】由题意可知,$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.



又因为$\triangle ABC$ 为等边三角形,$AB=2$,所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2\times\dfrac{1}{2}=2$,所以$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=[(1-\lambda)\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}]\cdot(\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\lambda(1-\lambda)\times2-4(1-\lambda)-4\lambda+2=-\dfrac{3}{2}$,解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$,

故选 C.

7-2. -8 或 5 【解析】由 $3\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，可得 $7\boldsymbol{c}=-(3\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$，即 $49\boldsymbol{c}^2=9\boldsymbol{a}^2+\lambda^2\boldsymbol{b}^2+6\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，所以 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2=1$，所以 $49=9+\lambda^2+6\lambda\cos\dfrac{\pi}{3}$，即 $\lambda^2+3\lambda-40=0$，解得 $\lambda=-8$ 或 $\lambda=5$.

7-3. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ 【解析】因为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是钝角，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，且 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\neq\pi$.

由 $(t\cdot\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1+t\cdot\boldsymbol{e}_2)<0$，且 $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$，得 $t<0$，

令 $t\cdot\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+t\cdot\boldsymbol{e}_2)$，$\lambda<0$，即

$\begin{cases}t=\lambda,\\1=\lambda\cdot t,\end{cases}$ 解得 $t=-1$，故 $t<0$ 且 $t\neq-1$，即实数 t 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$.

8-1. B 【解析】令 $f(t)=|\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{b}^2+2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+t^2\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2t^2+2t|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta+|\boldsymbol{b}|^2$，$t\in\mathbf{R}$，因为 $|\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{a}|_{\min}=1$，所以当 $t=-\dfrac{2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta}{2|\boldsymbol{a}|^2}=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|\cos\theta}{|\boldsymbol{a}|}$ 时，$f(t)=|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\theta)=1$，所以 $|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta=1$，又 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $|\boldsymbol{b}|\sin\theta=1$，即 $|\boldsymbol{b}|=\dfrac{1}{\sin\theta}$. 所以若 θ 确定，则 $|\boldsymbol{b}|$ 唯一确定.

8-2. C 【解析】由题可设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{c}(\lambda>0)$，由 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{4}$ 可知 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c})=\sqrt{2}|\lambda\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}|\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2$，所以 $|\boldsymbol{c}|=\dfrac{2}{\lambda+1}$. 因为 $\lambda>0$，所以 $\lambda+1>1$，所以 $0<\dfrac{2}{\lambda+1}<2$，即 $|\boldsymbol{c}|\in(0,2)$.

故选 C.

8-3. $[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$ 【解析】设向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 θ，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}-1=0$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-1=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\theta$，

则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-1|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||\cos\theta|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，当且仅当 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线时取等号，

两边平方得 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1\leqslant\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+1\leqslant3^2+2^2$，解得 $-2\sqrt{3}\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant2\sqrt{3}$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的取值范围是$[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$.

9-1. $\frac{1}{6}$　$\frac{13}{2}$　【解析】$\because \overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$,

$\therefore AD/\!/BC$, $\therefore \angle BAD=180°-\angle B=120°$,

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos 120°=\lambda\times6\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-9\lambda=-\frac{3}{2}$,

解得 $\lambda=\frac{1}{6}$.

取 MN 的中点为 O,连接 DO(图略),根据极化恒等式,得 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}=\frac{1}{4}[(2\overrightarrow{DO})^2-(\overrightarrow{MN})^2]=\overrightarrow{DO}^2-\frac{1}{4}$,当 $|\overrightarrow{DO}|$取得最小值时,$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的值最小. $\because$ 当 $DO\perp BC$ 时,$|\overrightarrow{DO}|$取得最小值,此时$|\overrightarrow{DO}|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值为$\frac{13}{2}$.

巩固练

1. B　【解析】因为$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$,$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)\cdot(-3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2)=-9|\boldsymbol{e}_1|^2+8|\boldsymbol{e}_2|^2+6\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=-9\times1^2+8\times1^2+6\times0=-1$. 故选 B.

2. D　【解析】因为$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=3$,向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 150°,所以向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=3\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{\boldsymbol{b}}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{b}$. 故选 D.

3. A　【解析】因为$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=9+16=25=|\overrightarrow{CA}|^2$,所以 $\angle ABC=90°$,所以原式$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB})=0+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC}^2=-25$.

4. C　【解析】设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ ($\theta\in[0,\pi]$). 因为$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,所以$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$,所以$\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即$|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=0$. 因为非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,所以 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$.

因为 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$,故选 C.

5. B　【解析】由题意,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=1\times3\times\frac{1}{3}=1$,所以$(2\boldsymbol{a}+$

$b)\cdot b=2a\cdot b+b\cdot b=2\times1+3\times3=11$.

故选 B.

6. 3 【解析】由题意可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos120^\circ=2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$,且 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=4+(-1)=3$.

7. 【解】(1)因为 $|a+b|^2=a^2+2a\cdot b+b^2=|a|^2+2a\cdot b+|b|^2=4+2a\cdot b+16=12$,所以 $a\cdot b=-4$. 设 a 与 b 的夹角为 θ $(\theta\in[0,\pi])$,则 $\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{-4}{2\times4}=-\frac{1}{2}$,又 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$,

故 a 与 b 的夹角为$\frac{2\pi}{3}$.

(2)因为 $(2a-b)\perp(a+kb)$,所以 $(2a-b)\cdot(a+kb)=0$,即 $2a^2+2ka\cdot b-a\cdot b-kb^2=0$,即 $2|a|^2+2ka\cdot b-a\cdot b-k|b|^2=0$,所以 $8-4(2k-1)-16k=0$,

即 $12-24k=0$,解得 $k=\frac{1}{2}$.

8. D 【解析】因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$,

所以 $\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=0$,

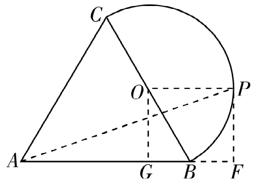
所以 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$,所以 $OB\perp AC$.

同理由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$,得 $OA\perp BC$,所以 O 是 $\triangle ABC$ 的三条高所在直线的交点. 故选 D.

9. C 【解析】由题意可得 $e_1\cdot e_2=1\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$,故 $a\cdot b=(2e_1+e_2)\cdot(-3e_1+2e_2)=-6e_1^2+e_1\cdot e_2+2e_2^2=-6+\frac{1}{2}+2=-\frac{7}{2}$,$|a|=\sqrt{(2e_1+e_2)^2}=\sqrt{4e_1^2+4e_1\cdot e_2+e_2^2}=\sqrt{7}$,$|b|=\sqrt{(-3e_1+2e_2)^2}=\sqrt{9e_1^2-12e_1\cdot e_2+4e_2^2}=\sqrt{7}$,故 $\cos\langle a,b\rangle=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{-\frac{7}{2}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=-\frac{1}{2}$. 由于$\langle a,b\rangle\in[0,\pi]$,故$\langle a,b\rangle=\frac{2\pi}{3}$,故选 C.

10. B 【解析】$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cdot\cos\angle PAB=2|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB$,所以当

点 P 在点 C 处时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 最小，最小值为 $2|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=2\times2\times\dfrac{1}{2}=2$.



如图，过圆心 O 作 $OP/\!/AB$ 交圆弧于点 P，连接 AP，此时 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 最大.

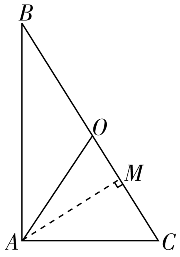
过点 O 作 OG 垂直 AB 于点 G，过点 P 作 PF 垂直 AB，交 AB 的延长线于点 F，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{AB}|(|\overrightarrow{AG}|+|\overrightarrow{GF}|)=2\times\left(\dfrac{3}{2}+1\right)=5$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的取值范围为 $[2,5]$. 故选 B.

11. $\dfrac{3}{4}$ 【解析】因为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O，$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，所以 O 为 BC 的中点，即 BC 为外接圆直径，所以 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$.

设外接圆半径为 r，又 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AC}|$，所以 $OB=OC=OA=AC=r$，所以 $AB=\sqrt{(2r)^2-r^2}=\sqrt{3}r$.

如图，过点 A 作 $AM\perp BC$，垂足为 M，所以向量 $\overrightarrow{BA}$ 在向量 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{BM}$，所以 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BC}$，所以 $\lambda=\dfrac{BM}{BC}$.

又易得 $B=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $BM=AB\cdot\cos B=\sqrt{3}r\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3r}{2}$，所以 $\lambda=\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{\frac{3}{2}r}{2r}=\dfrac{3}{4}$.

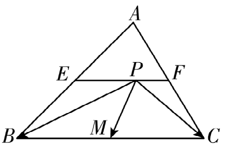


12. $\sqrt{3}$ 【解析】如图所示，取 BC 的中点 M，设 h 为点 A 到 BC 的距离，

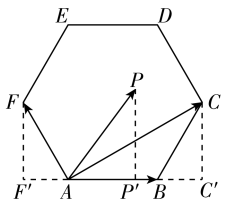
由极化恒等式，可知 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PM}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$，$S_{\triangle ABC}=\frac{h}{2}\times BC=1$，

则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{PM}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{PM}^2+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}^2\geqslant 2\sqrt{\frac{3}{4}}\times\frac{h}{2}\times BC=2\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$，当且仅当 $PM\perp BC$ 时，等号成立.

故 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BC}^2$ 的最小值为$\sqrt{3}$.



13. BC 【解析】由题意可知，$|\overrightarrow{AB}|=2$，如图，根据正六边形的特征，可得 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影的数量的取值范围是$(-1,3)$，结合向量数量积的定义，可知 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 等于 $\overrightarrow{AB}$ 的模与 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影的数量的乘积，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是$(-2,6)$，故选 BC.



14. B 【解析】由投影的数量的定义得 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影的数量为$|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，所以 A 不成立；

由 $(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$，所以 B 成立；

有 $\lambda(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})=\lambda\cdot|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，$(\lambda\boldsymbol{a})*\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，当 $\lambda<0$ 时不成立，所以 C 不成立；

由 $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=0$，得 $\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$，即两向量平行，所以 D 不成立. 故选 B.

8.1.3　向量数量积的坐标运算

易错记

1-1. 直角梯形　【解析】由题可得，$\overrightarrow{AB}=$

$(6,2)$，$\overrightarrow{CD}=(-9,-3)$，$\overrightarrow{AD}=(1,-3)$，$\overrightarrow{BC}=(4,-2)$.

因为 $\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$，所以 $AB\parallel CD$，且 $AB\neq 0$. 而 $\overrightarrow{AD}\neq\lambda\overrightarrow{BC}(\lambda\in\mathbf{R})$，所以 AD 与 BC 不平行. 又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，所以 $AB\perp AD$. 故四边形 $ABCD$ 为直角梯形.

2-1. C 【解析】$\because\tan\alpha=-2$，$\therefore$ 可设 $P(x,-2x)$，则 $OP=(x,-2x)$，$\because OQ=(-3,-4)$，$\therefore\cos\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\rangle=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|}=\frac{5x}{5\sqrt{5}|x|}=\frac{\sqrt{5}x}{5|x|}$. 当 $x>0$ 时，$\cos\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\rangle=\frac{\sqrt{5}}{5}$；当 $x<0$ 时，$\cos\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\rangle=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 C.

2-2. 【解】(1)$\because 2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,3)$，$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(k-1,2k+1)$，$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，

$\therefore(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=3(k-1)+3(2k+1)=0$，解得 $k=0$.

(2)$\because 2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,3)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,3)$，

$\therefore(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0+9=9$.

又 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=3\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=3$，

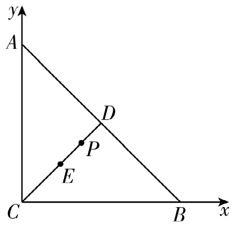
$\therefore(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\cos\theta=9\sqrt{2}\cos\theta=9$，

解得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $\theta\in[0,\pi]$，$\therefore\theta=\frac{\pi}{4}$.

题型诀

1-1. A 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,2)$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(-2,1)\cdot(1,3)=-2+3=1$. 故选 A.

1-2. C 【解析】如图，以 C 为坐标原点建立平面直角坐标系，则 $A(0,2)$，$B(2,0)$，$D(1,1)$，记 CD 中点为 E，则由中点坐标公式得 $E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，易知 P 为 DE 中点，所以 $P\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$，所以 $\overrightarrow{PA}=\left(-\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)$，$\overrightarrow{PB}=\left(\frac{5}{4},-\frac{3}{4}\right)$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}+\frac{5}{4}\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{15}{8}$. 故选 C.



1-3. $\frac{96}{25}$ 【解析】因为 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，

所以 $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,

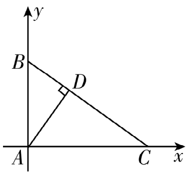
所以 $AB\perp AC$, $BC=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2}=5$.

因为 $AD\perp BC$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}AD\cdot BC$,

即 $\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}AD\times5$，所以 $AD=\frac{12}{5}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADB$ 中，$DB=\sqrt{AB^2-AD^2}=\frac{9}{5}$，所以 $\overrightarrow{BD}=\frac{9}{25}\overrightarrow{BC}$.

如图，以 A 为坐标原点，AC 所在直线为 x 轴，AB 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，



则 $A(0,0)$, $C(4,0)$, $B(0,3)$, $\overrightarrow{AC}=(4,0)$, $\overrightarrow{AB}=(0,3)$.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{9}{25}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{9}{25}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{9}{25}\overrightarrow{AC}+\frac{16}{25}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{36}{25},\frac{48}{25}\right)$, $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\left(\frac{4}{3},1\right)$,

所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{4}{3}\times\frac{36}{25}+1\times\frac{48}{25}=\frac{96}{25}$.

2-1. C 【解析】由题意得 $m^2=3$，解得 $m=\pm\sqrt{3}$,

又 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向共线，故 $m=-\sqrt{3}$，此时 $\boldsymbol{a}-\sqrt{3}\boldsymbol{b}=(-2\sqrt{3},6)$,

故$|\boldsymbol{a}-\sqrt{3}\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+6^2}=4\sqrt{3}$.

故选 C.

2-2. A 【解析】由 $\boldsymbol{a}=(2,-3)$, $\boldsymbol{b}=(m,1)$,可得 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(2+2m,-1)$, $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(2-2m,-5)$. 又 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$,则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2$, 即 $(2+2m)^2+1=(2-2m)^2+25$,解得 $m=\frac{3}{2}$. 故选 A.

3-1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】由题意知 $|\boldsymbol{a}|=1$, $\boldsymbol{c}=(2,2)$,则 $|\boldsymbol{c}|=2\sqrt{2}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0\times2+1\times2=2$,所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3-2. $-2+\sqrt{3}$ 【解析】由向量的夹角公式

得 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{m+1}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$,

即$\sqrt{2}(m+1)=\sqrt{m^2+1}$,

得 $m^2+4m+1=0$,解得 $m=-2\pm\sqrt{3}$.

易知 $m>-1$,所以 $m=-2+\sqrt{3}$.

3-3. $\left(-9,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(2,1)$, $\boldsymbol{b}=(4,-3)$,所以 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-6,7)$, $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2\lambda+4,\lambda-3)$.

因为 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角,

所以$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})<0$,即$-6(2\lambda+4)+7(\lambda-3)<0$,解得 $\lambda>-9$.

且 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 不共线,所以$-6(\lambda-3)\neq7(2\lambda+4)$,解得 $\lambda\neq-\frac{1}{2}$.

综上,$\lambda>-9$ 且 $\lambda\neq-\frac{1}{2}$,所以 λ 的取值范围为$\left(-9,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

4-1. C 【解析】设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$,则 $\begin{cases}2x-3y=0,\\x-2y=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-3,\\y=-2.\end{cases}$

4-2. A 【解析】因为 $\boldsymbol{b}=(1,-1)$, $\boldsymbol{c}=(4,5)$,所以 $\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}=(1,-1)+\lambda(4,5)=(4\lambda+1,5\lambda-1)$. 又 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}$ 垂直,所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c})=1\times(4\lambda+1)+2\times(5\lambda-1)=0$,解得 $\lambda=\frac{1}{14}$. 故选 A.

5-1. D 【解析】因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(t-2,-3)$, 又 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角,所以$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+$

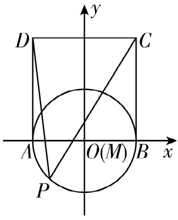
$\boldsymbol{b})<0$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 不反向共线,

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 反向共线时, $-6t-2(t-2)=0$, 解得 $t=\frac{1}{2}$,

所以 $t^2-2t-3<0$ 且 $t\neq\frac{1}{2}$, 所以 $t\in\left(-1,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},3\right)$, 故选 D.

5-2. D 【解析】若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角为锐角, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不同向, 即 $t-1+3t>0$, 即 $t>\frac{1}{4}$, 由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线得 $2t-2=\frac{3}{2}t$, 得 $t=4$, 故 $t\in\left(\frac{1}{4},4\right)\cup(4,+\infty)$. 故选 D.

6-1. B 【解析】以 AB 所在直线为 x 轴, 线段 AB 的中垂线为 y 轴建立平面直角坐标系, 如图所示, 则 $C(1,2)$, $D(-1,2)$.



圆 M 为单位圆, 设 $P(\cos\theta,\sin\theta)$,

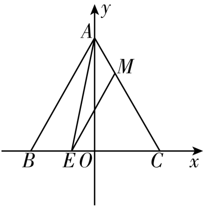
则 $\overrightarrow{PC}=(1-\cos\theta,2-\sin\theta)$,

$\overrightarrow{PD}=(-1-\cos\theta,2-\sin\theta)$,

所以 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=(1-\cos\theta)(-1-\cos\theta)+(2-\sin\theta)^2=\cos^2\theta-1+4-4\sin\theta+\sin^2\theta=4-4\sin\theta$,

因为 $\sin\theta\in[-1,1]$, 所以 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}\in[0,8]$. 故选 B.

6-2. A 【解析】以线段 BC 的中点 O 为坐标原点, BC, OA 所在直线分别为 x 轴、y 轴建立如图所示的平面直角坐标系.



设 $E(a,0)$, $M(x,y)$, 则 $-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$, $A(0,3)$, $C(\sqrt{3},0)$,

由 $3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}$ 得 $\begin{cases}3x=\sqrt{3},\\3(y-3)=-3,\end{cases}$ 得

$M\left(\frac{\sqrt{3}}{3},2\right)$,

$\overrightarrow{EA}=(-a,3)$, $\overrightarrow{EM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-a,2\right)$,

所以 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EA}=-a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-a\right)+6=\left(a-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\frac{71}{12}$,

因为 $-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$,所以当 $a=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时,

$(\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EA})_{\min}=\frac{71}{12}$;

当 $a=-\sqrt{3}$ 时,$(\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EA})_{\max}=10$,

所以 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EA}\in\left[\frac{71}{12},10\right]$. 故选 A.

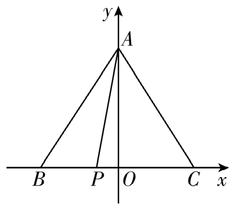
6-3. -1 【解析】如图,以 BC 的中点 O 为坐标原点,建立平面直角坐标系,

则 $B(-2,0)$, $C(2,0)$,设 $A(0,m)(m>0)$, $P(x,0)(-2\leqslant x\leqslant 2)$,

则 $\overrightarrow{PA}=(-x,m)$, $\overrightarrow{PB}=(-2-x,0)$,

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-x(-2-x)=x^2+2x=(x+1)^2-1$,

因为 $-2\leqslant x\leqslant 2$,所以当 $x=-1$ 时,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 取得最小值,$(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB})_{\min}=-1$.



7-1. B 【解析】由题可知 $\boldsymbol{c}=(3\lambda,4-4\lambda)$,则 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{9\lambda^2+(4-4\lambda)^2}=\sqrt{25\lambda^2-32\lambda+16}=\sqrt{25\left(\lambda-\frac{16}{25}\right)^2+\frac{144}{25}}$,

当 $\lambda=\frac{16}{25}$ 时,$|\boldsymbol{c}|_{\min}=\frac{12}{5}$. 故选 B.

7-2. D 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(1,0)$, $\boldsymbol{b}=(\cos\theta,\sin\theta)$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1+\cos\theta,\sin\theta)$,

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{2+2\cos\theta}$,

因为 $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,则 $\cos\theta\in[0,1]$,

可得 $\sqrt{2+2\cos\theta}\in[\sqrt{2},2]$,

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的取值范围是 $[\sqrt{2},2]$.

8-1. C 【解析】由题意可知 $|\boldsymbol{b}|=3$,

因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$，

即 $10=4-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9$，可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{3}{2}$，

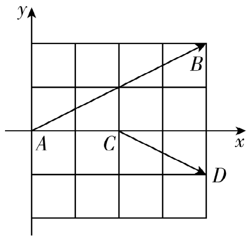
所以向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的坐标为 $\left(\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^2}\right)\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{6}\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

巩固练

1. D 【解析】因为 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,1)$，所以当 $\boldsymbol{c}=(4,4)$ 时，$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，故选 D.

2. D 【解析】因为向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(x-1,x)(x>1)$，且 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$，所以 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}=\sqrt{(x-1)^2+x^2}$，解得 $x=-1$（舍）或 $x=2$，即 $\boldsymbol{b}=(1,2)$，所以 $m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2m-1,m-2)$，所以 $(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=4m-5=0$，解得 $m=\dfrac{5}{4}$. 故选 D.

3. C 【解析】如图，以 A 为原点，AC 为 2 个单位长度，建立平面直角坐标系，则 $B(4,2)$，$C(2,0)$，$D(4,-1)$，$\overrightarrow{AB}=(4,2)$，$\overrightarrow{CD}=(2,-1)$，所以向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{8-2}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{3}{5}$. 故选 C.



4. D 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$，所以与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $-\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$. 故选 D.

5. $(2,1)$ 【解析】设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$，则 $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=(x+1,y+2)$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=(x-1,y+1)$. 由 $(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})/\!/\boldsymbol{b}$，得 $\begin{cases}x+1-(y+2)=0,\\2(x-1)=y+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ 所以 $\boldsymbol{c}=(2,1)$.

6. A 【解析】因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐

角，则 $\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle>0$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线.

当 $\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle>0$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2x+6>0$，解得 $x>-3$；当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，$3x=4$，解得 $x=\frac{4}{3}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，$x\neq\frac{4}{3}$. 所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角的充要条件是 $\left\{x \,\middle|\, x>-3 \text{ 且 } x\neq\frac{4}{3}\right\}$，显然 $\left\{x \,\middle|\, x>-3 \text{ 且 } x\neq\frac{4}{3}\right\}$ 是 $\{x|x>-3\}$ 的真子集，即"$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角"是"$x>-3$"的充分不必要条件. 故选 A.

7. C 【解析】依题意设 $\boldsymbol{e}=(1,0)$，$\boldsymbol{a}=(x,y)$，

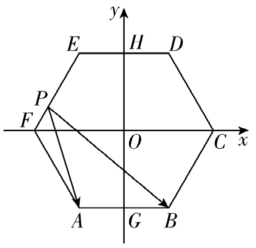
由 $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=3$ 得 $x=3$，则 $\boldsymbol{a}=(3,y)$，

又 $\lambda\boldsymbol{e}-\boldsymbol{a}=(\lambda,0)-(3,y)=(\lambda-3,-y)$，且 $|\lambda\boldsymbol{e}-\boldsymbol{a}|=1$，

所以 $\sqrt{(\lambda-3)^2+(-y)^2}=1$，即 $y^2=1-(\lambda-3)^2$，所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+y^2}=\sqrt{9+1-(\lambda-3)^2}\leqslant\sqrt{10}$，当且仅当 $\lambda=3$ 时取等号，即 $|\boldsymbol{a}|$ 的最大值为 $\sqrt{10}$.

8. B 【解析】以正六边形 $ABCDEF$ 中心 O 为原点建立平面直角坐标系，如图所示，设 AB，DE 交 y 轴于点 G，H，

则 $C(2,0)$，$F(-2,0)$，$A(-1,-\sqrt{3})$，$B(1,-\sqrt{3})$，$G(0,-\sqrt{3})$，$E(-1,\sqrt{3})$，$D(1,\sqrt{3})$，$H(0,\sqrt{3})$.



设 $P(x,y)(-2\leqslant x\leqslant 2)$，则 $\overrightarrow{PA}=(-1-x,-\sqrt{3}-y)$，$\overrightarrow{PB}=(1-x,-\sqrt{3}-y)$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2+y^2+2\sqrt{3}y+2$. 由正六边形对称性，不妨只研究点 P 在 y 轴上及 y 轴左侧的情况.

(1) 当点 P 在线段 EH 上时，$x\in[-1,0]$，$y=\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2+11\leqslant 12$；

(2) 当点 P 在线段 AG 上时，$x\in[-1,

$0]$，$y=-\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2-1\leqslant 0$；

(3)当点 P 在线段 EF 上时，x,y 满足 $y=\sqrt{3}(x+2)$，$x\in[-2,-1]$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4x^2+18x+26=4\left(x+\frac{9}{4}\right)^2+\frac{23}{4}\leqslant 12$；

(4)当点 P 在线段 AF 上时，x,y 满足 $y=-\sqrt{3}(x+2)$，$x\in[-2,-1]$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4x^2+6x+2=4\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{4}\leqslant 6.$

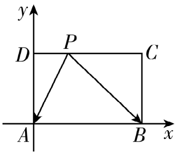
综上，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最大值为 12. 故选 B.

9. $[8,10]$ 【解析】以 A 为坐标原点，AB,AD 所在直线分别为 x,y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(6,0)$，$C(6,4)$，$D(0,4)$，

设 $P(s,4)$，因为 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC}$，所以 $(s,0)=\lambda(6,0)$，即 $s=6\lambda$，故 $P(6\lambda,4)$，$\lambda\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$，

则 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=(-6\lambda,-4)+(6-6\lambda,-4)=(6-12\lambda,-8)$，

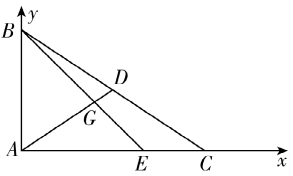
$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{(6-12\lambda)^2+64}$，因为 $\lambda\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$，所以 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{(6-12\lambda)^2+64}\in[8,10]$.



10. $\left(\frac{10}{3},\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)$ 【解析】平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{2})$，$\boldsymbol{b}=(2,\sqrt{2})$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,2\sqrt{2})$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$，

向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的坐标为 $\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{10}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{5}{3}\boldsymbol{b}=\left(\frac{10}{3},\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)$.

11. 【解】如图，以 A 为坐标原点，AC 所在直线为 x 轴，AB 所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(0,2)$，$C(3,0)$.



(1) 由 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$，得 $E(2,0)$，所以 $\overrightarrow{BE}=(2,-2)$. 由 D 是 BC 的中点，得 $D\left(\frac{3}{2},1\right)$，所以 $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{3}{2},1\right)$. 设 $G(x,y)$，则 $\overrightarrow{AG}=(x,y)$，$\overrightarrow{BG}=(x,y-2)$.

因为 A,G,D 三点共线，所以 $\overrightarrow{AG}//\overrightarrow{AD}$，即 $x=\frac{3}{2}y$. ①因为 B,G,E 三点共线，所以 $\overrightarrow{BG}//\overrightarrow{BE}$，即 $2(y-2)=-2x$. ②联立①②，得点 G 的坐标为 $\left(\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right)$，所以 $\overrightarrow{AG}=\left(\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right)$.

所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AD}$，所以实数 λ 的值为 $\frac{4}{5}$.

(2) 设 $H(t,-t+2)$，则 $\overrightarrow{HA}=(-t,t-2)$，$\overrightarrow{HB}=(-t,t)$，$\overrightarrow{HC}=(3-t,t-2)$. 因为 $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$，所以 $(-t)^2+t(t-2)=-t(3-t)+(t-2)^2$，解得 $t=\frac{4}{5}$，所以点 H 的坐标为 $\left(\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right)$，所以 $\overrightarrow{GH}=\left(-\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$. 又 $\overrightarrow{BC}=(3,-2)$，所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{GH}=-\frac{2}{5}\times3+\frac{2}{5}\times(-2)=-2$.

12. BC 【解析】对于 A，若 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则 $x\cdot2=1\times1$，解得 $x=\frac{1}{2}$，故 A 错误；对于 B，C，若 $x=2$，则 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1+1\times2=4$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^2}\boldsymbol{b}=\frac{4}{5}\boldsymbol{b}=\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$，故 B 正确，C 正确；

对于 D，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角，等价于

$\begin{cases} x\neq\dfrac{1}{2}, \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x+2>0, \end{cases}$ 解得 $x>-2$ 且 $x\neq\dfrac{1}{2}$，

故 D 错误. 故选 BC.

8.2 三角恒等变换

8.2.1 两角和与差的余弦+
8.2.2 两角和与差的正弦、正切

易错记

1-1. D 【解析】由 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，得 $0<\alpha+\beta<\pi$，又 $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{11}{14}<0$，故 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$. 而 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$，则 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\dfrac{11}{98}+\dfrac{60}{98}=\dfrac{1}{2}$，又 $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\beta=\dfrac{\pi}{3}$. 故选 D.

1-2. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ 【解析】$\cos A+\sin C=\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-C\right)+\sin C=\cos\dfrac{5\pi}{6}\cos C+\sin\dfrac{5\pi}{6}\sin C+\sin C=\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C-\dfrac{1}{2}\cos C\right)=\sqrt{3}\sin\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)$. 由于 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，

则 $A=\dfrac{5\pi}{6}-C<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{\pi}{3}<C<\dfrac{\pi}{2}$，即 $\dfrac{\pi}{6}<C-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $\sin\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，从而 $\cos A+\sin C$ 的取值范围为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

2-1. D 【解析】因为 $OP=7$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$.

由 $\sin\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)+\cos\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$ 及诱导公式可得 $\sin\alpha\cos\beta-$

$\cos\alpha\sin\beta=\frac{3\sqrt{3}}{14}$,所以 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

因为 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$,所以 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$,所以 $\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\frac{13}{14}$,所以 $\sin\beta=\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{13}{14}-\frac{1}{7}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$,所以 $\beta=\frac{\pi}{3}$,故选 D.

2-2. C 【解析】因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$,所以 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{3}$,所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{6-4\sqrt{5}}{15}\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$,所以 $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$. 又 $\cos\alpha=\frac{4}{5}\Rightarrow\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$,且已知 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\beta\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right)$.

综上,$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$.

题型诀

1-1. D 【解析】$\tan 975°=\tan(5\times180°+75°)=\tan 75°=\tan(30°+45°)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$,故选 D.

1-2. C 【解析】因为 $\frac{\sin 40°\cdot\sin 80°}{\cos 40°+\cos 60°}$

$$=\frac{\sin(60°-20°)\cdot\sin(60°+20°)}{\cos(20°+20°)+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20°\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sin 20°\right)^2}{\frac{3}{2}-2\sin^2 20°}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}\cos^2 20°-\frac{1}{4}\sin^2 20°}{2\left(\frac{3}{4}-\sin^2 20°\right)}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}-\sin^2 20°}{2\left(\frac{3}{4}-\sin^2 20°\right)}=\frac{1}{2},$$

所以原式$=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

2-1. C 【解析】因为$0<\alpha<\frac{\pi}{2}, 0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\alpha+\beta<\pi$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{4}{5}$. 又$-\frac{\pi}{4}<\beta-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$，所以 $\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{12}{13}$. 所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\cos(\alpha+\beta)\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)+\sin(\alpha+\beta)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{56}{65}$. 故选 C.

2-2. B 【解析】因为 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=3>0$，

所以 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

因为 $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $-\frac{\pi}{4}<\alpha+\beta<\pi$，

又 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}<0$，

故$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=-2$.

故 $\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]=\frac{-2-3}{1+(-2)\times3}=1$，

所以 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{3-1}{1+3\times1}=\frac{1}{2}$，

故选 B.

2-3. 【解】因为$\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，

所以 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$，$\pi<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$.

因为 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$，所以 $\sin(\alpha-$

$\beta)=\frac{5}{13}$.

因为 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，所以 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{4}{5}$.

所以 $\sin 2\alpha=\sin[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=-\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=-\frac{56}{65}$.

3-1. B 【解析】由 $\sin\alpha=\frac{1}{8}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{8}$ 得 $\cos\alpha=\pm\frac{3\sqrt{7}}{8}$，$\sin(\alpha+\beta)=\pm\frac{3\sqrt{7}}{8}$，而 $\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，所以 $\sin\beta=1$ 或 $\sin\beta=-\frac{31}{32}$. 当 $\sin\beta=1$ 时，只有 B 符合；当 $\sin\beta=-\frac{31}{32}$时，四个选项均不符合. 故选 B.

3-2. 【解】(1) 因为 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\alpha\in(0,\pi)$，

所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2$，

所以 $\tan\beta=\tan[\alpha-(\alpha-\beta)]=\frac{\tan\alpha-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\frac{1}{3}$.

(2) 由 (1) 知 $\tan\beta=\frac{1}{3}$，

则 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-2+\frac{1}{3}}{1-(-2)\times\frac{1}{3}}=-1$.

因为 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}<0$，$\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

因为 $\tan\beta=\frac{1}{3}>0$，$\beta\in(0,\pi)$，所以 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

3–3.【解】因为 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的两根，

所以 $\tan\alpha+\tan\beta=5>0,\tan\alpha\tan\beta=6>0$，

因此 $\tan\alpha>0,\tan\beta>0$.

又 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$，所以 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，

则 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{5}{1-6}=-1$，

因此 $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$.

4–1.【解】原式 $=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\dfrac{\sin\beta\cos\theta-\cos\beta\sin\theta}{\sin\beta\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha}{\sin\theta\sin\alpha}=\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=0$.

4–2.【证明】$\sin(2\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]-2\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin\beta$.

由待证式知 $\sin\alpha\neq0$，故两边同除以 $\sin\alpha$ 得 $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

5–1. B 【解析】原式 $=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\dfrac{1}{2}\cos\alpha\right)=2\left(\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)$. 故选 B.

5–2. B 【解析】$\sqrt{2}(\cos72^\circ+\cos18^\circ)=\sqrt{2}(\sin18^\circ+\cos18^\circ)=2\sin(18^\circ+45^\circ)=2\sin63^\circ\approx2\times0.891=1.782$. 故选 B.

5–3. A 【解析】$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\theta=-\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$ 可化为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{3}{2}\cos\theta=-\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$，整理得 $\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，即 $\cos\dfrac{\pi}{6}\cos\theta+\sin\dfrac{\pi}{6}\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$，所以 $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{3}{5}$，所以 $\cos\left(\theta+\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，故选 A.

6-1. B 【解析】$\sin 123°\cos 27° - \sin 33°\sin 27°$

$=\sin 57°\cos 27° - \cos 57°\sin 27°$

$=\sin(57°-27°)$

$=\sin 30°$

$=\frac{1}{2}$.

6-2. B 【解析】因为 $\cos 105°\cos 45° + \sin 255°\sin 135° = -\cos 75°\cos 45° - \sin 75°\sin 45° = -(\cos 75°\cos 45° + \sin 75° \cdot \sin 45°) = -\cos(75°-45°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7-1. $\frac{59}{72}$ 【解析】$(\sin\alpha - \cos\beta)^2 = \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = \frac{1}{9}$，$(\cos\alpha - \sin\beta)^2 = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = \frac{1}{4}$，两式相加得 $2-2(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \frac{13}{36}$，

即 $2-2\sin(\alpha+\beta) = \frac{13}{36}$，

解得 $\sin(\alpha+\beta) = \frac{59}{72}$.

8-1. BC 【解析】$f(x) = \sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi) - \cos(\omega x+\varphi) = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6} + \varphi\right)$，由 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，可得周期 $T = \frac{\pi}{2}\times 2 = \pi$，则 $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$. 则 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6} + \varphi\right)$. 对于选项 A，由 $\omega=2$ 可得选项 A 错误；对于选项 B，若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(0) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = \pm 2$，则 $-\frac{\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$ 或 $-\frac{\pi}{6} + \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\varphi<\pi$，则 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$，故选项 B 正确；对于选项 C，由 $x\in\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$，可得 $2x - \frac{\pi}{6} + \varphi \in \left(-\frac{\pi}{6} + \varphi, \frac{\pi}{6} + \varphi\right)$，又 $0<\varphi<\pi$，且 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，则 $\frac{\pi}{6} + \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$，解得

$0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{3}$，则 φ 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$，故选项 C 正确；对于选项 D，由 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$，可得 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=0$，则 $-\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\varphi<\pi$，则 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，故选项 D 错误.

故选 BC.

8-2. B 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin(A-B)\cos B+\cos(A-B)\cdot\sin B\geqslant1$，则 $\sin[(A-B)+B]=\sin A\geqslant1$，所以 $\sin A=1$，$A=\frac{\pi}{2}$，故 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

8-3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(\cos 14°,\cos 76°)$，$\boldsymbol{b}=(\cos 59°,\cos 31°)$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos 14°\cos 59°+\cos 76°\cos 31°=\cos 14°\cos 59°+\sin 14°\sin 59°=\cos(59°-14°)=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8-4. 【解】(1) 因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$，

所以 $(-1,\sqrt{3})\cdot(\cos A,\sin A)=1$，

即 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，

所以 $2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=1$，所以 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

因为 $0<A<\pi$，所以 $-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，

所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 由 $\tan\left(B+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan B+1}{1-\tan B\times1}=-3$，解得 $\tan B=2$.

因为 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $\tan A=\sqrt{3}$.

所以 $\tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{2+\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}=\frac{8+5\sqrt{3}}{11}$.

巩固练

1. A 【解析】$\cos 20°\cos 70°-\sin 160°\cdot\sin 70°$

$=\cos 20°\cos 70°-\sin(180°-20°)\sin 70°$

$=\cos 20°\cos 70°-\sin 20°\sin 70°$

$=\cos(20°+70°)=\cos 90°=0.$

2. B 【解析】因为 $\tan 95°=k$,

所以 $\tan 35°=\tan(95°-60°)=\dfrac{k-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}k}$.

3. B 【解析】因为 α,β 均为锐角,且 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$, $\sin\beta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$,所以 $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$. 故选 B.

4. D 【解析】$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,故 A 式不恒成立;

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,故 B 式不恒成立;

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$,故 C 式不恒成立;

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\cdot(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$,故 D 式恒成立.

故选 D.

5. A 【解析】因为 A 是锐角,

所以 $\dfrac{\pi}{6}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$,

所以 $\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)>0$.

又因为 $\cos\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{5}{13}$,

所以 $\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=\dfrac{12}{13}$.

则 $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-A\right)=\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{6}-A\right)\right]=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+A\right)=\cos\left[\dfrac{\pi}{6}+\left(\dfrac{\pi}{6}+A\right)\right]=$

$\cos\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}+A\right)-\sin\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}+A\right)=$ $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{5}{13}-\frac{1}{2}\times\frac{12}{13}=\frac{5\sqrt{3}-12}{26}$.

故选 A.

6.【解】方法一：由积化和差公式得 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{6}$.

方法二：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}$，①

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，②

①+②，得 $2\cos\alpha\cos\beta=1$，

所以 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，

代入①，得 $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{6}$.

7. D【解析】因为 $f(x)=\cos 2x\cos\varphi-\sin(2x+\pi)\sin\varphi=\cos 2x\cos\varphi+\sin 2x\sin\varphi=\cos(2x-\varphi)$，

又因为 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得最小值，

所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi\right)=-1$，所以 $\frac{2\pi}{3}-\varphi=2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}$，

所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}-2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，取 φ 的一个值为 $-\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $2k\pi<2x+\frac{\pi}{3}<2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}$，

所以 $k\pi-\frac{\pi}{6}<x<k\pi+\frac{\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$，令 $k=0$，

所以函数 $f(x)$ 的一个单调递减区间为 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$.

8. B【解析】因为 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2+3\sqrt{3}x+4=0$ 的两个根，

所以 $\tan\alpha+\tan\beta=-3\sqrt{3}<0$，

$\tan\alpha\tan\beta=4>0$. 所以 $\tan\alpha<0$, $\tan\beta<0$, 即 $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, 所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-3\sqrt{3}}{1-4}=\sqrt{3}$. 因为 $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, 所以 $\alpha+\beta\in(-\pi,0)$, 且 $\alpha+\beta\neq-\frac{\pi}{2}$, 所以 $\alpha+\beta=-\frac{2\pi}{3}$, 故选 B.

9. D 【解析】因为 $\sin\alpha-\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\alpha+\sin\beta=\frac{1}{3}$, 所以 $(\sin\alpha-\cos\beta)^2=\frac{4}{9}$, $(\cos\alpha+\sin\beta)^2=\frac{1}{9}$,

所以 $\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{4}{9}$①,

$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{9}$②,

①+②得 $\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{5}{9}$,

所以 $2-2\sin\alpha\cos\beta+2\cos\alpha\sin\beta=\frac{5}{9}$,

即 $2-2(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=\frac{5}{9}$,

所以 $2-2\sin(\alpha-\beta)=\frac{5}{9}$,

解得 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{13}{18}$, 故选 D.

10. D 【解析】由 $\tan\alpha=\frac{3}{\tan\frac{\pi}{7}}$

得 $\tan\alpha\tan\frac{\pi}{7}=3$,

$$\text{故}\frac{\sin\left(\alpha+\frac{5\pi}{14}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)}$$

$$=\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{5\pi}{14}\right)\right]}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)}$$

$$=\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{7}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)}$$

$$=\frac{\cos\alpha\cos\frac{\pi}{7}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{7}}{\cos\alpha\cos\frac{\pi}{7}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{7}}$$

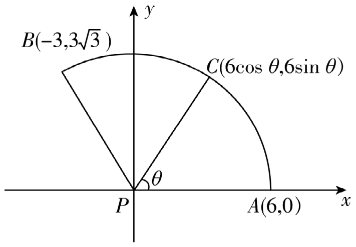
$$=\frac{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{7}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{7}}=\frac{1+3}{1-3}=-2.$$ 故选 D.

11. $\left[2,\frac{2\sqrt{57}}{3}\right]$ 【解析】以 P 为原点，建立如图所示的直角坐标系. 由题意知，$A(6,0)$，$B(-3,3\sqrt{3})$，设 $\angle APC=\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}\right)$，则点 C 的坐标为 $(6\cos\theta,6\sin\theta)$. 因为 $\overrightarrow{PC}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}$，所以 $(6\cos\theta,6\sin\theta)=x(6,0)+y(-3,3\sqrt{3})=(6x-3y,3\sqrt{3}y)$，所以

$$\begin{cases}6x-3y=6\cos\theta,\\3\sqrt{3}y=6\sin\theta,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\cos\theta,\\y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta,\end{cases}$

所以 $2x+3y=2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\cos\theta\right)+3\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta=\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin\theta+2\cos\theta=\frac{2\sqrt{57}}{3}\sin(\theta+\varphi)$，其中 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{57}}{19}<\frac{1}{2}$，$\cos\varphi=\frac{4\sqrt{19}}{19}>\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $0<\varphi<\frac{\pi}{6}$. 因为 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}$，所以 $\frac{\sqrt{57}}{19}\leqslant\sin(\theta+\varphi)\leqslant1$，所以 $2\leqslant\frac{2\sqrt{57}}{3}\sin(\theta+\varphi)\leqslant\frac{2\sqrt{57}}{3}$. 所以 $2x+3y$ 的取值范围是 $\left[2,\frac{2\sqrt{57}}{3}\right]$.



12. 【解】(1)∵ $\frac{6\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{2\cos(\pi-\alpha)-3\sin(\pi+\alpha)}=-8$，∴ $\frac{6\sin\alpha+\cos\alpha}{-2\cos\alpha+3\sin\alpha}=\frac{6\tan\alpha+1}{-2+3\tan\alpha}=$

-8，解得 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\because\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}+\beta<\dfrac{3\pi}{4}$. 又 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore\cos\beta=\cos\left[\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)-\dfrac{\pi}{4}\right]=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\therefore\sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$，$\therefore\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}}=1$，

又$\because\alpha+\beta\in\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$，$\therefore\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

13. AB 【解析】$f(x)=\dfrac{3}{2}\sin 2x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cos 2x=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. 对于 A 选项，令 $2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以函数图象关于直线 $x=\dfrac{5\pi}{12}$ 对称，A 选项正确；对于 B 选项，令 $2x-\dfrac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即函数的图象 C 的对称中心为 $\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，B 选项正确；对于 C 选项，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，则 $2x-\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$，所以当 $2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{5\pi}{12}$ 时，取最大值，最大值为 $3\sin\dfrac{\pi}{2}=3$，C 选项错误；对于 D 选项，令 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{11\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以函数的单调递减区间为 $\left[\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\dfrac{11\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，又当 $k=-1$ 时，单调

递减区间为 $\left[-\frac{7\pi}{12},-\frac{\pi}{12}\right]$，当 $k=0$ 时，单调递减区间为 $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$，所以函数在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 上不单调递减，D 选项错误. 故选 AB.

8.2.3 倍角公式

题型诀

1-1. C 【解析】对于 A，$\frac{1}{2}(\cos 15°-\sin 15°)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 45°\cos 15°-\sin 45°\cdot\sin 15°)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(45°+15°)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 60°=\frac{\sqrt{2}}{4}$，A 不符合；对于 B，$\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，B 不符合；对于 C，$\frac{\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°}=\frac{1}{2}\times\frac{2\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°}=\frac{1}{2}\cdot\tan 45°=\frac{1}{2}$，C 符合；对于 D，$\sin 15°\cdot\cos 15°=\frac{1}{2}\sin 30°=\frac{1}{4}$，D 不符合. 故选 C.

1-2. 【解】(1) 原式 $=\frac{\sin(90°+20°)\sin 20°}{\cos 50°}=\frac{\sin 20°\cos 20°}{\cos 50°}=\frac{\frac{1}{2}\sin 40°}{\sin 40°}=\frac{1}{2}$.

(2) $\frac{\sin^2 50°}{1+\sin 10°}=\frac{1-\cos 100°}{2(1+\sin 10°)}=\frac{1-\cos(90°+10°)}{2(1+\sin 10°)}=\frac{1+\sin 10°}{2(1+\sin 10°)}=\frac{1}{2}$.

(3) 原式 $=\frac{\cos 10°-\sqrt{3}\sin 10°}{\sin 10°\cos 10°}$

$=\frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10°-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°\right)}{\sin 10°\cos 10°}$

$=\frac{4(\sin 30°\cos 10°-\cos 30°\sin 10°)}{2\sin 10°\cos 10°}$

$=\frac{4\sin(30°-10°)}{\sin 20°}=4$.

(4) $\cos 72°\cos 36°=$

$\frac{2\sin 36°\cos 36°\cos 72°}{2\sin 36°}=\frac{2\sin 72°\cos 72°}{4\sin 36°}=$

$\frac{\sin 144°}{4\sin 36°}=\frac{\sin 36°}{4\sin 36°}=\frac{1}{4}$.

2－1. C 【解析】$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]=-\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-1=\frac{7}{25}$. 故选 C.

2−2. B 【解析】由 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{3}{5}-\cos(\pi-\alpha)$，

可得$\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\frac{3}{5}+\cos\alpha$，

即$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，即 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3}{5}$，

所以 $\cos\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-1=2\times\frac{9}{25}-1=-\frac{7}{25}$，

所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)+\pi\right]=-\cos\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{7}{25}$，故选 B.

2−3. $\frac{1}{3}$ 【解析】因为 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=-2$，

所以 $\tan\alpha=3$，所以 $\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{3}$.

3−1. $-\frac{5\pi}{4}$ 【解析】因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\cos\beta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{98}{100}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$，

$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\frac{20}{25}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=7$，$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1}{2}$，

所以 $\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$，

所以 $\tan(\alpha+2\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan\alpha\tan 2\beta}=\dfrac{7+\dfrac{4}{3}}{1-7\times\dfrac{4}{3}}=-1.$

因为 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\beta\in\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $(\alpha+2\beta)\in\left(-2\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$，

从而 $\alpha+2\beta=-\dfrac{5\pi}{4}$.

4－1.【解】原式 $=\dfrac{(1+\cos\theta)-\sin\theta}{(1-\cos\theta)-\sin\theta}+\dfrac{(1-\cos\theta)-\sin\theta}{(1+\cos\theta)-\sin\theta}$

$=\dfrac{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}-2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}+\dfrac{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}-2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}$

$=\dfrac{2\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2}\right)}{2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{\theta}{2}\right)}+\dfrac{2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{\theta}{2}\right)}{2\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2}\right)}$

$=-\dfrac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}-\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}=-\dfrac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}+\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}$

$=-\dfrac{2}{\sin\theta}$.

4－2.【证明】左边

$=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}{2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2\sin^2\theta+\cos\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta(2\cos\theta+1)}{\cos\theta(2\cos\theta+1)}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=$右边，

所以原式成立.

5－1.【解】$\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}+\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}=\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|+\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$，由 $\dfrac{3\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<2\pi$，得原式 $=\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5－2.【解】由于 $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，

则 $\sin\alpha-\cos\alpha>0$, $\sin\alpha+\cos\alpha>0$,

因而 $\sqrt{2+2\cos 2\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha}-\sqrt{1+\sin 2\alpha}$

$=\sqrt{2+4\cos^2\alpha-2}+\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}-\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$

$=2\cos\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha-\sin\alpha-\cos\alpha=0$.

6-1. A 【解析】$\because$ 关于 x 的方程 $x^2-x\cos A\cos B-\cos^2\frac{C}{2}=0$ 有一个根是 1,

$\therefore 1-\cos A\cos B-\cos^2\frac{C}{2}=0$,

$\therefore \sin^2\frac{C}{2}=\cos A\cos B$, 即 $\frac{1-\cos C}{2}=\cos A\cos B$,

$\therefore 1=2\cos A\cos B-\cos(A+B)=\cos A\cdot\cos B+\sin A\sin B=\cos(A-B)$.

$\because 0<A<\pi, 0<B<\pi$, $\therefore -\pi<A-B<\pi$,

$\therefore A-B=0$, $\therefore A=B$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形. 故选 A.

6-2. A 【解析】$\sin^2\frac{B+C}{2}+\cos 2A=\frac{1-\cos(B+C)}{2}+2\cos^2A-1=\frac{1+\cos A}{2}+2\cos^2A-1=-\frac{1}{9}$. 故选 A.

7-1. C 【解析】依题意可知 $\sin 18^\circ=\frac{\frac{1}{2}BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, 所以 $\sin 126^\circ=\sin(90^\circ+36^\circ)=\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ=1-2\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=1-\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. 故选 C.

巩固练

1. C 【解析】因为 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$, 所以 $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$, 又 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. 故选 C.

2. C 【解析】$\tan 67.5^\circ-\frac{1}{\tan 67.5^\circ}=\frac{\sin 67.5^\circ}{\cos 67.5^\circ}-\frac{1}{\frac{\sin 67.5^\circ}{\cos 67.5^\circ}}=\frac{\sin 67.5^\circ}{\cos 67.5^\circ}-\frac{\cos 67.5^\circ}{\sin 67.5^\circ}=\frac{\sin^2 67.5^\circ-\cos^2 67.5^\circ}{\sin 67.5^\circ\cos 67.5}=\frac{-\cos 135^\circ}{\frac{1}{2}\sin 135^\circ}=2$, 故选 C.

3. A 【解析】因为 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}(0<\alpha<\pi)$，

所以 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$，所以 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{3}{4}$.

又 $0<\alpha<\pi$，所以 $\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$，

所以 $\sin\alpha-\cos\alpha>0$，所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，即 $\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{2}$.

所以 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\times\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

故选 A.

4. C 【解析】令 $t=\alpha-\frac{\pi}{5}$，则 $\sin t=\frac{3}{4}$，$\alpha=t+\frac{\pi}{5}$，所以 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{10}\right)=\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2t=1-2\sin^2 t=-\frac{1}{8}$.

故选 C.

5. A 【解析】$\because \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=-\frac{3}{5}$，$\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\tan\theta}{\tan\theta+1}=2$，

$\therefore \frac{\sin\theta\cos 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=2\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{6}{5}$. 故选 A.

6. $-\frac{253}{204}$ 【解析】$\because \alpha,\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，且 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\sin\beta=\frac{5}{13}$，

$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\frac{12}{13}$，

$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$，$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\frac{5}{12}$，

$\therefore \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}$，

则 $\tan(2\alpha-\beta)=\dfrac{\tan 2\alpha-\tan\beta}{1+\tan 2\alpha\cdot\tan\beta}$

$=-\dfrac{253}{204}$.

7. $-\dfrac{2}{\cos\alpha}$ 【解析】$\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\dfrac{|\cos\alpha|}{1-\sin\alpha}+\dfrac{|\cos\alpha|}{1+\sin\alpha}=|\cos\alpha|\dfrac{2}{1-\sin^2\alpha}=|\cos\alpha|\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$.

又 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以 $\cos\alpha<0$，所以原式 $=-\dfrac{2}{\cos\alpha}$.

8.【解】(1) 根据三角函数的定义，因为角 α 终边过点 $(1,2)$，所以 $r=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-\dfrac{3}{5}$.

(2) 由 $\alpha\in(0,\pi)$ 且 $\tan\alpha=2>1$，得 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

由 (1) 知 $\cos 2\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$.

又因为 $\beta\in(0,\pi)$，$\cos\beta=-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}<0$，所以 $\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以 $\sin\beta=\sqrt{1-\left(-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

因为 $\sin(2\alpha-\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta-\cos 2\alpha\sin\beta=\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\right)-\left(-\dfrac{3}{5}\right)\times\dfrac{\sqrt{2}}{10}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且 $2\alpha-\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $2\alpha-\beta=-\dfrac{\pi}{4}$.

9.【解】(1) $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，最大值为 2.

(2) 由 $f(x)\geqslant\sqrt{3}$ 得 $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\sqrt{3}$,

即 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

可得 $2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{2\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$,

解得 $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$.

10. D 【解析】原式 $=\sqrt{4\cos^2 4}+2\sqrt{(\sin 4-\cos 4)^2}=|2\cos 4|+2|\sin 4-\cos 4|$. $\because \frac{5\pi}{4}<4<\frac{3\pi}{2}$,

$\therefore$ 原式 $=-2\sin 4$. 故选 D.

11. B 【解析】原式

$$=\frac{\tan^2 7.5°+1}{\tan^2 7.5°-8\sin^2 7.5°+1}$$

$$=\frac{\sin^2 7.5°+\cos^2 7.5°}{\sin^2 7.5°-8\sin^2 7.5°\cos^2 7.5°+\cos^2 7.5°}$$

$=\frac{1}{1-2\sin^2 15°}=\frac{1}{\cos 30°}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

12. $\frac{\pi}{4}$ 【解析】根据角 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,

$4\tan\frac{\alpha}{2}=1-\tan^2\frac{\alpha}{2}$,

得 $2\times\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=1$, 即 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$.

$\because 3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$, $\therefore 3\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]$,

整理可得 $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$,

则 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\tan\alpha$, 即 $\tan(\alpha+\beta)=1$.

$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{4}, 0<\beta<\frac{\pi}{4}$, $\therefore 0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$,

故 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

13. 【解】(1) $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+3=\frac{1}{2}\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]+3=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+3=$

$-\frac{1}{2}\cos 2x+3$.

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$，对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，对称中心为 $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},3\right)(k\in\mathbf{Z})$.

(2) $h(x)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+3$.

令 $-\pi+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

得 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以 $h(x)$ 的单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

(3) 若 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，则 $3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

所以 $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，即 $\frac{\tan x-1}{1+\tan x}=\frac{1}{3}$，解得 $\tan x=2$.

$f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+3=\frac{1}{2}(\sin^2 x-\cos^2 x)+3=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}+3=\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^2 x-1}{\tan^2 x+1}+3=\frac{33}{10}$.

14. ABC 【解析】对于 A，$\sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$，A 正确；

对于 B，$2\tan 15^\circ\cos^2 15^\circ=\frac{2\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}\cdot\cos^2 15^\circ=2\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，B 正确；

对于 C，$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\cos 90^\circ}{\cos 90^\circ+1}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{1-0}{0+1}}=\frac{1}{2}$，C 正确；

对于 D，$\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{6}=$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$，D 错误.

故选 ABC.

15. ABD　【解析】$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$.

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$ 时，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$，

函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$ 上单调递增，故 A 正确；

令 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

显然直线 $x=\frac{3\pi}{8}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴，故 B 正确；

将函数 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位后得到函数 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left[2\cdot\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，故 C 错误；

$f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+f(-x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(-2x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1=-1$，故 D 正确. 故选 ABD.

16. ACD　【解析】对于 A，由题意知，在扇形 OPQ 中，半径 $OP=1$，圆心角 $\angle POQ=\frac{\pi}{6}$，故弧 PQ 的长为 $\frac{\pi}{6}\times 1=\frac{\pi}{6}$，A 正确；

对于 B，扇形 OPQ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}\times 1=\frac{\pi}{12}$，B 错误；

对于 C，在 Rt$\triangle OBC$ 中，$OB=OC\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$，$BC=OC\cdot\sin\alpha=\sin\alpha$，

在 Rt$\triangle OAD$ 中，$OA=\sqrt{3}AD=\sqrt{3}BC=$

$\sqrt{3}\sin\alpha$, $AB=OB-OA=\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$,则矩形 $ABCD$ 的面积 $S=AB\cdot BC=(\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha)\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$,当 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$时,又 $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$,故 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,则 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{7}{9}$,则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{7}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{18}$,则 $S=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{18}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{9}$,即矩形 $ABCD$ 的面积为$\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{9}$,C 正确;

对于 D,由 C 的分析可知,矩形 $ABCD$ 的面积 $S=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$,且 $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$,故当 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=1$,即 $2\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, $\alpha=\frac{\pi}{12}$时,矩形 $ABCD$ 的面积取最大值$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$,D 正确,故选 ACD.

8.2.4　三角恒等变换的应用

易错记

1-1.【解】原式=

$$\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}(-\cos\alpha)}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

$\because\ \pi<\alpha<2\pi$, $\therefore\ \frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\pi$, $\therefore\ \cos\frac{\alpha}{2}<0$.

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}(-\cos\alpha)}{\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|}=\dfrac{-\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha}{-\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\cos\alpha$.

1-2.【解】由 α,β 均为锐角,得 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$.

又 $\sin\alpha-\sin\beta=-\dfrac{2}{3}<0$,所以 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$.

$(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{4}{9}$,①

$(\cos\alpha-\cos\beta)^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{4}{9}$,②

①+②,得 $2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\dfrac{8}{9}$,

解得 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{5}{9}$,即 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{5}{9}$,

则$\sin(\alpha-\beta)=-\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{9}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{14}}{9}$,

则 $\tan(\alpha-\beta)=-\dfrac{2\sqrt{14}}{5}$.

题型诀

1-1. C【解析】方法一:因为 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\sqrt{5}-2$.

方法二:因为 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}>0$, $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}>0$,所以角 α 的终边落在第一象限,角 $\dfrac{\alpha}{2}$ 的终边落在第一象限或第三象限,即 $\tan\dfrac{\alpha}{2}>0$,所以 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}{1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}}=\sqrt{5}-2$.

1-2. C 【解析】$\frac{1}{\cos 2\alpha}+\tan 2\alpha=\frac{1+\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{(1+\tan\alpha)^2}{1-\tan^2\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2\ 021$，故选 C.

1-3. $\frac{1}{5}$ 【解析】$\because\theta\in(\pi,2\pi)$，

$\therefore\frac{\theta}{2}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

$\therefore\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\frac{4}{5}$，$\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\frac{3}{5}$，

$\therefore\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{5}$.

1-4. $-\frac{3}{5}$　$\frac{1}{3}$ 【解析】因为 $\tan\theta=2$，

由万能公式得，$\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=-\frac{3}{5}$.

$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$.

2-1. B 【解析】$\cos A\sin C=\frac{1}{2}[\sin(A+C)-\sin(A-C)]=\frac{1}{2}[\sin 135°-\sin(A-C)]$.

由$-135°<A-C<135°$，得 $\sin(A-C)\in[-1,1]$，

则 $\cos A\sin C\in\left[\frac{\sqrt{2}-2}{4},\frac{\sqrt{2}+2}{4}\right]$. 故选 B.

2-2. $\frac{a}{b}$ 【解析】由和差化积公式得 $\sin 5x+\sin x=2\sin\frac{5x+x}{2}\cos\frac{5x-x}{2}=2\sin 3x\cos 2x$，$\cos 5x+\cos x=2\cos\frac{5x+x}{2}\cdot\cos\frac{5x-x}{2}=2\cos 3x\cos 2x$，则 $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x=\sin 3x(2\cdot\cos 2x+1)$，$\cos x+\cos 3x+\cos 5x=2\cos 3x\cdot\cos 2x+\cos 3x=\cos 3x(2\cos 2x+1)$，

故$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}$

$=\frac{\sin 3x(2\cos 2x+1)}{\cos 3x(2\cos 2x+1)}$

$=\tan 3x$，故 $\tan 3x=\frac{a}{b}$.

2-3.【解】$\cos 29^\circ\cos 31^\circ-\frac{1}{2}\cos 2^\circ=\frac{1}{2}[\cos(29^\circ+31^\circ)+\cos(29^\circ-31^\circ)]-\frac{1}{2}\cos 2^\circ=\frac{1}{2}\cos 60^\circ+\frac{1}{2}\cos 2^\circ-\frac{1}{2}\cos 2^\circ=\frac{1}{4}$.

3-1.【解】(1)原式

$$=\frac{(1+\cos 2\alpha)+\cos\alpha+\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha+\cos\alpha}$$

$$=\frac{2\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha+\cos\alpha}$$

$$=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha+\cos\alpha}=2\cos\alpha.$$

(2)原式$=\dfrac{(\sin A+\sin 5A)+2\sin 3A}{(\sin 3A+\sin 7A)+2\sin 5A}$

$$=\frac{2\sin 3A\cos 2A+2\sin 3A}{2\sin 5A\cos 2A+2\sin 5A}$$

$$=\frac{2\sin 3A(\cos 2A+1)}{2\sin 5A(\cos 2A+1)}$$

$$=\frac{\sin 3A}{\sin 5A}.$$

4-1. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】因为 $A+B+C=\pi$,

所以 $2\cos B\cos C-2\cos(B+C)=\sqrt{3}\sin C$,

所以 $2\cos B\cos C-2(\cos B\cos C-\sin B\cdot\sin C)=\sqrt{3}\sin C$,

所以 $2\sin B\sin C=\sqrt{3}\sin C$. 因为 $\sin C>0$,

所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为 $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

4-2. 4 【解析】因为 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2$,

所以$\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+1-\cos^2C=2$,

所以 $\cos^2C=-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)=-\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos C\cos(A-B)$.

又因为 C 为最大角,所以$|A-B|\neq C$,

所以 $\cos C=0$,即 $C=\frac{\pi}{2}$. 设 $B=\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

则在$\triangle ABC$ 中,$a=c\cos\theta$,$b=c\sin\theta$,

所以 $b+2a=c\sin\theta+2c\cos\theta=5$,

解得 $c=\dfrac{5}{\sin\theta+2\cos\theta}$,

所以 $a+c=\dfrac{5(1+\cos\theta)}{\sin\theta+2\cos\theta}$.

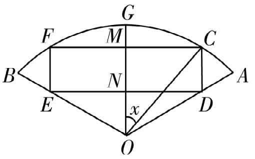
令 $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta+2\cos\theta}=t>0$, 则 $(2t-1)\cos\theta+t\sin\theta=1$,

所以 $\sqrt{(2t-1)^2+t^2}\sin(\theta+\varphi)\leqslant\sqrt{(2t-1)^2+t^2}\left(\tan\varphi=\dfrac{2t-1}{t}\right)$, 即 $\sqrt{(2t-1)^2+t^2}\geqslant1$, 解得 $t\geqslant\dfrac{4}{5}$ 或 $t\leqslant0$(舍去),

所以 $a+c$ 的最小值为 4.

5-1. B 【解析】因为 $OM=2$, $\angle AOM=x$, $\angle AOB=\dfrac{3\pi}{4}$, 所以 $\angle BOM=\dfrac{3\pi}{4}-x$, 所以 $OE=OM\cdot\cos\angle AOM=2\cos x$, $ME=OM\cdot\sin\angle AOM=2\sin x$, $OF=OM\cdot\cos\angle BOM=2\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)$, $MF=OM\cdot\sin\angle BOM=2\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)$, 所以 $S_{\text{四边形}MEOF}=S_{\triangle MOE}+S_{\triangle MOF}=\dfrac{1}{2}\times2\sin x\times2\cos x+\dfrac{1}{2}\times2\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)\times2\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)=\sin 2x+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, 故选 B.

5-2. 【解】(1) 如图, 设 OG 与 CF, DE 分别交于 M, N 两点.



由已知得 $CM=ND=OC\sin x=\sin x$, $CF=2CM=2\sin x$.

$OM=OC\cos x=\cos x$, $ON=\dfrac{ND}{\tan\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin x$,

所以 $CD=MN=OM-ON=\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin x$.

故 $S=CF\cdot CD=2\sin x\left(\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin x\right)$

$=2\sin x\cos x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin^2 x$

$=\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(0<x<\frac{\pi}{3}\right).$

当 $x=\frac{\pi}{12}$时，$S=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 因为 $0<x<\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{6}<2x+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

当且仅当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$时，S 取得最大值$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

巩固练

1. A 【解析】由 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

得 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$.

$\because \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\therefore \frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \cos\frac{\alpha}{2}>0$，

$\therefore \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \cos\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)=-\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

故选 A.

2. B 【解析】因为 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}$，

所以 $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2-\cos\alpha}$，又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$，

所以 $2-\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$，即 $2-\cos\alpha=1+\cos\alpha$，

解得 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. 又因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\tan\alpha=\sqrt{3}$.

故选 B.

3. C 【解析】∵ $\sin 74°=\cos 16°=m$,

∴ $\cos 8°=\sqrt{\frac{1+\cos 16°}{2}}=\sqrt{\frac{1+m}{2}}=\frac{\sqrt{2(1+m)}}{2}$. 故选 C.

4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】原式 $=\frac{2\sin\frac{35°+25°}{2}\cos\frac{35°-25°}{2}}{2\cos\frac{35°+25°}{2}\cos\frac{35°-25°}{2}}=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. $\frac{1}{2}$ 【解析】原式 $=\cos 40°+\cos 80°+\cos 60°-\cos 20°=2\cos 60°\cos(-20°)+\cos 60°-\cos 20°=\cos 60°=\frac{1}{2}$.

6. 【解】$\sin 381°\sin 81°-\frac{1}{2}\sin 12°$

$=\sin 21°\sin 81°-\frac{1}{2}\sin 12°$

$=-\frac{1}{2}[\cos(21°+81°)-\cos(21°-81°)]-\frac{1}{2}\sin 12°$

$=-\frac{1}{2}(\cos 102°-\cos 60°)-\frac{1}{2}\sin 12°$

$=-\frac{1}{2}\cos 102°+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin 12°$

$=\frac{1}{2}\sin 12°+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin 12°$

$=\frac{1}{4}$.

7. C 【解析】∵ $C=\pi-(A+B)$,

∴ $\sin C=\sin(A+B)=\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$,

∴ $2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$,

∴ $2\cos^2\frac{A+B}{2}=1$, 即 $\cos(A+B)=0$,

∴ $A+B=\frac{\pi}{2}$, ∴ $C=\frac{\pi}{2}$. 故此三角形为直角三角形. 故选 C.

8. D 【解析】∵ $\alpha,\beta\in(0,\pi)$, ∴ $\sin\alpha+\sin\beta>0$. 又 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\beta-$

$\cos\alpha)$，$\therefore \cos\beta-\cos\alpha>0$，

$\therefore \cos\beta>\cos\alpha$.

又 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，

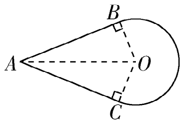
$\therefore \beta<\alpha$，

$\therefore 0<\alpha-\beta<\pi$.

由原式可知 $2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$，

$\therefore \tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\sqrt{3}$，$\therefore \dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \alpha-\beta=\dfrac{2\pi}{3}$.

9. A 【解析】设优弧 BC 所在圆的圆心为 O，连接 OA，OB，OC，如图，可知 $OB\perp AB$，$\angle OAB=\dfrac{1}{2}\angle BAC$.



设圆 O 的半径为 r，依题意有 $\dfrac{r+OA}{2r}=\dfrac{9}{5}$，即 $r=\dfrac{5}{13}OA$，所以 $\sin\angle OAB=\dfrac{5}{13}$，$\cos\angle BAC=1-2\sin^2\angle OAB=\dfrac{119}{169}$. 故选 A.

10. 【解】方法一：$\sin A\sin C=-\dfrac{1}{2}\cdot[\cos(A+C)-\cos(A-C)]$.

又 $\because B=\dfrac{\pi}{4}$，$\therefore A+C=\dfrac{3\pi}{4}$，

$\therefore \sin A\sin C=\dfrac{1}{2}\cos(A-C)+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

$\because -\dfrac{3\pi}{4}<A-C<\dfrac{3\pi}{4}$，$\therefore -\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos(A-C)\leqslant 1$.

$\therefore \sin A\sin C$ 的最大值为 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，无最小值.

方法二：$\sin A\sin C=\sin A\sin(\pi-A-B)=\sin A\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-A\right)=\sin A\cos\left(A-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin A\right)=$

$\frac{\sqrt{2}}{4}\sin 2A-\frac{\sqrt{2}}{4}\cos 2A+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{2}\sin\left(2A-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$\because 0<A<\frac{3\pi}{4}$, $\therefore -\frac{\pi}{4}<2A-\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}$.

$\therefore$ 当 $2A-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin A\sin C$ 取得最大值$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

$\sin A\sin C$ 的最大值为$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}$，无最小值.

11. AC 【解析】因为 α 为锐角，所以 $0<2\alpha<\pi$，所以 $\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\frac{12}{13}$，故 A 正确；

因为 α,β 为锐角，所以 $0<\alpha+\beta<\pi$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos[2\alpha-(\alpha+\beta)]=\cos 2\alpha\cos(\alpha+\beta)+\sin 2\alpha\sin(\alpha+\beta)=\left(-\frac{5}{13}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{12}{13}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{29\sqrt{5}}{65}$，故 B 错误；

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{29\sqrt{5}}{65}\right)=\frac{8\sqrt{5}}{65}$，故 C 正确；

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]=\frac{1}{2}\times\left[\frac{29\sqrt{5}}{65}-\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right]=\frac{21\sqrt{5}}{65}$，

所以 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{21}{8}$，故 D 错误. 故选 AC.